# CLASA A IX A - BAREM.

**SUB 1.** Fie $k$ cercul înscris în $\Delta ABC$ și $\Delta A_1B_1C_1$ și $I$ centrul lui. Inversiunea de pol $I$ și de cerc fix $k$ transformă dreptele $AB, BC, CA$ – tangente lui $k$ – în cercuri egale, tangente interior lui $k$, având diametrele $IC', IA', IB'$, unde $A', B', C'$ sunt punctele de tangență cu cercul $k$ ale dreptelor menționate (2 puncte). Cele trei cercuri se retaie două câte două în transformatele prin inversiune ale punctelor $A, B, C$. Cercul ce trece prin aceste puncte este transformatul cercului $\Delta$ (2 puncte) și este egal cu cercurile de diametre $IA', IB', IC'$, conform problemei piesei de 5 lei a lui Țițeica. Considerații analoage au loc pentru $\Delta_1$ (1 punct). În ipoteza $\Delta \subset \Delta_1$, prin inversiune se obține $t(\Delta_1) \subset t(\Delta)$, unde $t(X)$ reprezintă transformatul cercului $X$. Cum $t(\Delta_1)$ și $t(\Delta)$ sunt egale ca diametru, $t(\Delta_1) = t(\Delta) \Rightarrow \Delta_1 = \Delta$ (2 puncte)

**SUB 2.** NU. Presupunem prin absurd că o astfel de configurație există. Fie $\alpha = \widehat{P_1P_0P_2}$, $\beta = \widehat{P_2P_0P_3}$, $\gamma = \widehat{P_3P_0P_1}$. Avem $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ și cel mult unul este ascuțit (2 puncte). Fie $\beta = \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Dacă $\overrightarrow{P_0P_2} + \overrightarrow{P_0P_3} = \overrightarrow{P_0M}$, atunci $M$ se află în interiorul unghiului $\widehat{P_2P_0P_3}$ (2 puncte). Unghiul $\widehat{P_1P_0M}$ este mai mare sau egal cel puțin decât unul din unghiurile $\alpha$ sau $\gamma$. (2 puncte). Ambele unghiuri $\alpha$ și $\gamma$ sunt obtuze, deci $\widehat{P_1P_0M} > 90°$, contradicție (1 punct)

SUB 3 Cu $u_1 \le u_2 \le \dots \le u_n$, demonstrăm prin inducție după $k$: $u_k \le n^{2^{k-1}}$ (1 punct) Cazul $k=1$ (1 punct)

Presupunem $u_i \le n^{2^{i-1}}$, pentru $1 \le i \le r-1$.

$$0 < 1 - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{u_i} = \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{u_i} \le \frac{n-r+1}{u_r} \le \frac{n}{u_r} \quad (2 \text{ puncte})$$

$$u_r \le n\left(1 - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{u_i}\right)^{-1} = n \cdot \left(\frac{m}{u_1 \dots u_{r-1}}\right)^{-1} \le n \cdot \left(\frac{1}{u_1 \dots u_{r-1}}\right)^{-1}$$

$$= n\, u_1 \cdots u_{r-1} \le n^{2^{r-1}} \quad (3 \text{ puncte})$$

SUB 4 $(x,y)=k$, $m=\frac{x}{k}$, $n=\frac{y}{k} \Rightarrow \left\lceil \frac{km}{n} \right\rceil m = kn+1+\lceil 2\sqrt{kn}\rceil$ (1 punct)

Dacă $m \le n \Rightarrow \left\lceil \frac{km}{n} \right\rceil m \le \left\lceil \frac{kn}{n} \right\rceil n = kn < kn+1+\lceil 2\sqrt{kn}\rceil$ (F), deci $m \ge n+1$ (1 punct) Dacă $m \ge n+2 \Rightarrow \left\lceil \frac{km}{n} \right\rceil m \ge \left\lceil \frac{k(n+2)}{n} \right\rceil (n+2) =$

$= \left(k + \left\lceil \frac{2k}{n} \right\rceil\right)(n+2) \ge (k+1)(n+2) > kn+2+k+n \ge kn+2+2\sqrt{kn} >$

$> kn+1+\lceil 2\sqrt{kn}\rceil$ (F), deci $m \le n+1 \Rightarrow m = n+1$ (1 punct)

Ec. devine: $\left(k + \left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil\right)(n+1) = kn+1+\lceil 2\sqrt{kn}\rceil$. Dacă $n<k$, atunci $\left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil \ge 2$ și $kn+2+k+2n = (k+2)(n+1) \le \left(k+\left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil\right)(n+1) = kn+1+\lceil 2\sqrt{kn}\rceil$ $< kn+2+2\sqrt{kn} \le kn+2+k+n \Rightarrow n < 0$ (F), deci $n \ge k$ (1 punct)

$n \ge k \Rightarrow \left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil = 1 \Rightarrow (k+1)(n+1) = kn+1+\lceil 2\sqrt{kn}\rceil \Rightarrow k+n = \lceil 2\sqrt{kn}\rceil$.

$\Leftrightarrow k+n-1 < 2\sqrt{kn} \le k+n$ (1 punct) $\Leftrightarrow (\sqrt{n}-\sqrt{k})^2 < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{n}-\sqrt{k} < 1 \Leftrightarrow n < (\sqrt{k}+1)^2 \Leftrightarrow n \le k + \lceil 2\sqrt{k}\rceil$ (1 punct)

$x = (n+1)k$, $y = nk$, $k \le n \le k + \lceil 2k \rceil$, deci

$N(k) = \lceil 2\sqrt{k}\rceil + 1$ (1 punct)

# CLASA A X-A - BAREME

**SUB 1** Numărul este $a_{2m,2n} \cdot a_{m,n}$, unde $a_{m,n} = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ (1 punct)

$a_{m,n-1} + a_{m-1,n} = 4a_{m-1,n-1}$ (3 puncte)

$a_{m,n} \in \mathbb{N}$, prin inducție după $n$ (3 puncte)

**SUB 2** Fie $A_k(z_k)$, $M(-z)$, $N((n-1)z)$ (2 puncte). $|z_k| = 1$

$|\overline{z}_k||z+z_k| = |1+z\overline{z}_k| = |z+z_k|$ și $|z_k-(n-1)z| = |\overline{z}_k||z_k-(n-1)z|$
$= |1-(n-1)z\overline{z}_k|$ (2 puncte), deci e suf: $\sum|1+z\overline{z}_k| \le \sum|1-(n-1)z\overline{z}_k|$

Avem: $\frac{1}{n-1}\sum_{m\neq k}|1-(n-1)z\overline{z}_m| \geq \frac{1}{n-1}\cdot\left|\sum_{m\neq k}(1-(n-1)z\overline{z}_m)\right| = |1+z\overline{z}_k|$
(2 puncte) $\sum|1+z\overline{z}_k| \le \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{m\neq k}|1-(n-1)z\overline{z}_m|$
$= \sum|1-(n-1)z\overline{z}_k|$ (1 punct)

$\boxed{\text{SUB 3}}$ $x \to x+z$: $f(x+y+z)-f(x+z)f(y)-d\sin(x+z)\sin y=0$

$y\to y+z$: $f(x+y+z)-f(x)f(y+z)-d\sin x\sin(y+z)=0$. (2 puncte)

$\Rightarrow f(x)f(y+z)-f(x+z)f(y)+d\sin x\sin(y+z)-d\sin(x+z)\sin y=0$ (1 punct)

$f(x)[f(y+z)-f(y)f(z)-d\sin y\sin z]+f(x)f(y)f(z)+df(x)\sin y\sin z$
$-[f(x+z)-f(x)f(z)-d\sin x\sin z]f(y)-f(x)f(y)f(z)-df(y)\sin x\sin z$
$+d\sin x\sin(y+z)-d\sin(x+z)\sin y=f(x)f(y+z)-f(x+z)f(y)$
$+d\sin x\sin(y+z)-d\sin(x+z)\sin y=0$. (1 punct)

$df(x)\sin y\sin z+d\sin x\sin(y+z)-df(y)\sin x\sin z-d\sin(x+z)\sin y$
$=f(x)[f(y+z)-f(y)f(z)-d\sin y\sin z]+f(x)f(y)f(z)+df(x)\sin y\sin z$
$-[f(x+z)-f(x)f(z)-d\sin x\sin z]f(y)-f(x)f(y)f(z)-df(y)\sin x\sin z$
$+d\sin x\sin(y+z)-d\sin(x+z)\sin y+f(x)[-f(y+z)+f(y)f(z)+d\sin y\sin z]$
$+f(y)[f(x+z)-f(x)f(z)-d\sin x\sin z]=0$ (1 punct)

$y=z=\pi/2\Rightarrow f(x)-f(\frac{\pi}{2})\sin x-\cos x=0$ (1 punct) $f(\pi)=-1$ $(x=\pi)$

şi $f(\frac{\pi}{2})^2=f(\pi)-d=-d-1$ $(x=y=\pi/2)\Rightarrow f(\pi/2)=\pm\sqrt{-d-1}$ (1 punct)

$f(x)=c\sin x+\cos x$ sau $f(x)=-c\sin x+\cos x$, unde $c=\sqrt{-d-1}$.

$\boxed{\text{SUB 4}}$ a) $x^2\equiv 0,1,4 \pmod 8$ (1 punct) $ax^2+by^2$ nu poate lua ca valori toate resturile modulo 8 (3 puncte)

b) $a=b=1$, $c=-1$ sau orice exemplu corect (1 punct)

$2n+1=f(0,n+1,n)$ (1 punct)

$2n+2=f(1,n+1,n)$ (1 punct)

# CLASA A XI-A – BAREME

**SUB 1** Demonstrăm că $(1/x_n)_{n\ge 1}$ este convergent.

$1/x_{n+1} - 1/x_n \le y_{n+1}$ (1 punct)

$1/x_n - 1/x_1 = \sum\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right) \le y_2+y_3+\dots+y_n \Rightarrow (1/x_n)_{n\ge 1}$ este mărginit (2 puncte)

$\frac{1}{x_n} - (y_1+\dots+y_n) \le \frac{1}{x_{n-1}} - (y_1+\dots+y_{n-1}) \Rightarrow z_n = \frac{1}{x_n} - (y_1+\dots+y_n)$ este descrescător (2 puncte)

$(z_n)$ este mărginit, deci convergent (1 punct)

$\Rightarrow (1/x_n)$ convergent (1 punct)

**SUB 2** $x_3 = \frac{2}{3},\ x_4 = \frac{9}{14},\ x_5 = \frac{11}{17}, \dots$

cu $|2\cdot 14 - 3\cdot 9| = 1$, $|9\cdot 17 - 11\cdot 14| = 1$.

Dacă $x_{i-1} = \frac{p}{q}$, $x_i = \frac{s}{t}$ sunt cu $|pt - qs| = 1$, atunci $|s(q+t) - t(p+s)| = 1$, deci se obțin numai fracții ireductibile (2 puncte)

Prin inducție: $x_n = \frac{2F_{n-2} + 9F_{n-1}}{3F_{n-2} + 14F_{n-1}}$, $n \ge 5$ (2 puncte),

unde $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(w^n - \bar{w}^n)$ este șirul lui Fibonacci, $w = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ (1 punct)

De aici, $\lim x_n = (2+9w)/(3+14w)$. (2 puncte)

**SUB 3** $(x_n)$ convergent (numai) pentru $t=0$, $t=\frac{1}{a}$ (1 punct)

Dacă $t \in \mathbb{R} \setminus (0, \frac{1}{a})$, atunci $f^{[2]}(t) < f(t)$ (1 punct). Prin inducție, $f^{[n]}(t) < \ldots < f^{[2]}(t) < f(t) < 0$ (1 punct), deci $(x_n)$ divergent (1 punct). Fie $0 < t < 1/a$. Rezultă că $0 < f(t) \le \frac{1}{4a}$ (1 punct). Fie $N \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2Na} < f(t)$. Cum $f$ este crescătoare pe $(0, \frac{1}{4a}]$, avem: $f^{[2]}(t) > f\left(\frac{1}{2Na}\right) = \frac{2N-1}{4N^2a} \geq \frac{1}{(2N+2)a}$ (1 punct). Prin inducție: $f^{[n]}(t) > \frac{1}{(2N+2n-2)a}$ și prin comparație cu seria armonică, $(x_n)$ diverge (1 punct)

**SUB 4** Pentru $n \in \mathbb{N} - \{1,2,3,4,6\}$, avem $\varphi(n) \geq 4$ (1 punct)

Fie $1, k, n-k, n-1$ numere prime cu $n$. Avem $1 \le a_{ij} < n$, pentru $i = 1, k, n-k, n-1$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, și rezultă:

$a_{1,j} + a_{n-1,j} = n$ și $a_{1,n} + a_{n-1,n} = 2n$ (2 puncte)

$a_{k,j} + a_{n-k,j} = n$ și $a_{k,n} + a_{n-k,n} = 2n$ (2 puncte)

pentru $j = 1, 2, \ldots, n-1$. De aici $\det A_n = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N} - \{1,2,3,4,6\}$ și concluzia (2 puncte)

CLASA A XII-A - BAREME

**SUB 1** Limita este $a\,g(0)$. Fie $\varepsilon>0$, $M=\max\limits_{0\le x\le a}|g(x)-g(0)|$. $\exists\ \delta_\varepsilon>0$ cu $|g(x)-g(0)|<\varepsilon$, $x\in[0,\delta_\varepsilon]$ (1 punct). Cum $f(x)\le f(a-\varepsilon)<1$ pentru $x\in[0,a-\varepsilon]$, şi $\lim\limits_{n\to\infty}f^n(a-\varepsilon)=0$, avem $0\le f^n(x)<\delta_\varepsilon$, $n\ge n_0$ (2 puncte). Atunci $|g(f^n(x))-g(0)|<\varepsilon$, $x\in[0,a-\varepsilon]$ şi $\left|\int_0^a g(f^n(x))dx-a\,g(0)\right|=\left|\int_0^a(g(f^n(x))-g(0))dx\right|$ (2 puncte) $\le\int_0^{a-\varepsilon}|g(f^n(x))-g(0)|dx+\int_{a-\varepsilon}^{a}|g(f^n(x))-g(0)|dx$ $\le\varepsilon(a-\varepsilon)+M\varepsilon<\varepsilon(a+M)$ (2 puncte)

---

b) **SUB 2** Fie $B=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$. Cum $g(0)=g(1)=0$, $\exists\ \alpha\in(0,1)$ a.î. $g'(\alpha)=f(\alpha)=0$. (2 puncte)

Cum $\int_0^\alpha f(t)dt=-\int_0^{1-\alpha}f(1-t)dt$, putem presupune $\alpha\le\frac{1}{2}$. Înlocuind eventual $f$ cu $-f$, presupunem $\int_0^\alpha f(t)dt\ge0$. (1 punct) Din $f'(x)\ge-B$ rezultă $f(x)\le B(\alpha-x)$, $\forall\ x\in[0,\alpha]$ (2 puncte), deci

$$\int_0^\alpha f(t)dt\le\int_0^\alpha B(\alpha-t)dt=\frac{\alpha^2}{2}B\le\frac{1}{8}B \text{ (2 puncte)}$$

$\boxed{\text{SUB 3}}$ Demonstrăm că G este abelian.

Fie $f: G \to G$, $f(y) = y^{-1} g(y)$. Dacă $f(y) = f(t)$, rezultă $y^{-1} g(y) = t^{-1} g(t) \Rightarrow ty^{-1} = g(ty^{-1}) \Rightarrow ty^{-1} = e \Rightarrow y = t \Rightarrow$ $f$ injectivă (2 puncte)

G este finit, deci $f$ surjectivă, $\forall h \in G, \exists x \in G$ a.î. $h = x^{-1} g(x)$ (2 puncte)

Rezultă $g(h) = g(x^{-1} g(x)) = g(x^{-1})\, x = g(x)^{-1} x = h^{-1}$ (2 puncte)

$g(h_1 h_2) = g(h_1) g(h_2) \Rightarrow (h_1 h_2)^{-1} = h_1^{-1} h_2^{-1} \Rightarrow$ G abelian (1 punct)

$\boxed{\text{SUB 4}}$ Fie $K = \{T \subset S \mid a, b \in T \Rightarrow ab \notin H$ sau $ba \notin H\}$. $K \neq \emptyset$ pt că $T = \{s\} \in K$ (1 punct)

G finit, deci există $T \in K$ a.î. $|T|$ este maxim (1 punct)

Presupunem prin reducere la absurd că $|T| < \frac{1}{2}|S| \Rightarrow |S \setminus T| > |T|$. Cum $|T|$ – maxim, $S \setminus T \notin K$, există $s_1, s_2 \in S \setminus T$ a.î. $s_1 s_2 \in H$ și $s_2 s_1 \in H$ (1 punct)

$|T|$ – maxim, $s_1 \notin T \Rightarrow T \cup \{s_1\} \notin K \Rightarrow \exists\, t_1 \in T$ a.î. $s_1 t_1 \in H$ și $t_1 s_1 \in H$. Analog, $\exists\, t_2 \in T$ cu $s_2 t_2 \in H$ și $t_2 s_2 \in H$ (2 puncte)

$t_1 t_2 = (t_1 s_1)(s_1^{-1} s_2^{-1})(s_2 t_2) \in H$ și $t_2 t_1 = (t_2 s_2)(s_2^{-1} s_1^{-1})(s_1 t_1) \in H$, contradicție cu $t_1 \in T$ și $t_2 \in T$ (2 puncte)