CLASA A IX-A

Subiectul 1. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt circumscrise aceluiași cerc și sunt înscrise în discurile D și D_1. Demonstrați că, dacă $D \subset D_1$, atunci $D = D_1$.

GM

Subiectul 2. Vom spune că o configurație formată din 4 puncte P_0, P_1, P_2, P_3 în plan este *șocantă* dacă sunt îndeplinite simultan următoarele două condiții:
a) $P_1P_2P_3$ este triunghi nedegenerat și P_0 este un punct în interiorul său;
b) pentru toate posibilitățile de alegere ale indicilor $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$, unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{P_0P_i}$ și $\overrightarrow{P_0P_j} + \overrightarrow{P_0P_k}$ este mai mic sau egal cu 90^0.
Dați exemplu de o configurație șocantă sau demonstrați că astfel de configurații nu există, cu justificare riguroasă.

* * *

Subiectul 3. Fie $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n} = 1$.
Demonstrați că: $\max\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \le n^{2^{n-1}}$.

* * *

Subiectul 4. Pentru fiecare număr natural nenul k, notăm cu $N(k)$ numărul soluțiilor $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ale ecuației

$$\left\lceil \frac{x \cdot (x,y)}{y} \right\rceil \cdot \frac{x}{(x,y)} = \left\lceil \left(\sqrt{y} + 1\right)^2 \right\rceil,$$

cu proprietatea că $|x - y| = k$. Determinați $N(k)$ sub forma unei funcții de k.
((x,y) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor naturale x și y, iar $\lceil z \rceil$ este cel mai mic număr întreg care este mai mare sau egal cu z)

* * *

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7. Timp de lucru: 3 ore.

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie m, n numere naturale. Demonstrați că:

$$\frac{(4m)!\,(4n)!}{m!\,n!\,(m+n)!\,(2m+2n)!} \in \mathbb{N}.$$

GM

Subiectul 2. Se consideră un poligon $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ $(n \geq 3)$ înscris într-un cerc de centru O, care are centrul de greutate tot în punctul O. Demonstrați că, pentru orice puncte M, N cu proprietatea că $\overrightarrow{ON} + (n-1)\overrightarrow{OM} = \vec{0}$, avem:

$$\sum_{k=0}^{n-1} MA_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} NA_k.$$

Nicolae Bourbăcuț și Leo Giugiuc

Subiectul 3. Fie $d \in \mathbb{R}$, $d < -1$. Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem:

$$f(x+y) - f(x)f(y) = d \sin x \sin y.$$

* * *

Subiectul 4. a) Fie funcția $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definită, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, cu formula $f(x, y) = ax^2 + by^2$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$. Este posibil ca a, b să fie alese astfel încât f să fie surjectivă?
b) Fie funcția $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definită, pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, cu formula $g(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Este posibil ca a, b, c să fie alese astfel încât g să fie surjectivă?

* * *

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7. Timp de lucru: 3 ore.

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere reale astfel încât șirul $(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)_{n\geq 1}$ este convergent și pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$0 < x_n \leq x_{n+1}(1 + x_n y_{n+1}).$$

Dați exemplu de un număr $\alpha \in \mathbb{R}^*$ pentru care șirul $(x_n^\alpha)_{n\geq 1}$ este convergent.

GM

Subiectul 2. *Ambientul* a două numere raționale pozitive x și y, pe care îl vom nota $A(x, y)$, se definește astfel: se scriu numerele ca fracții ireductibile $x = a/b$ și $y = c/d$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, apoi $A(x, y) = (a + c)/(b + d)$. Considerăm acum $x_0 = 4/7, x_1 = 3/4$ și pentru orice număr natural $n \geq 2$, definim $x_n = A(x_{n-2}, x_{n-1})$. Calculați: $\lim_{n\to\infty} x_n$ sau demonstrați că această limită nu există.

* * *

Subiectul 3. Fie $a > 0$ și funcția $f(t) = t - at^2$. Pentru ce valori $t \in \mathbb{R}$, șirul

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} f^{[k]}(t), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

este convergent? ($f^{[0]}(t) = t$ și $f^{[i+1]} = f \circ f^{[i]}$, pentru orice $i \in \mathbb{N}$)

* * *

Subiectul 4. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, definim matricea $A_n = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, unde

$$a_{ij} = \begin{cases} ij (mod\ n) & , dacă\ n\ nu\ divide\ ij \\ n & , dacă\ n\ divide\ ij \end{cases}.$$

Arătați că există $M > 0$ astfel încât $|\det A_n| \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. ($k \bmod n$ înseamnă restul pe care îl dă k la împărțirea cu n)

* * *

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7. Timp de lucru: 3 ore.

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie $a \in [1, \infty)$. Considerăm două funcții $f, g: [0, a] \to [0,1]$, f strict crescătoare și g continuă. Calculați:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a g(f^n(x))\, dx.$$

GM

Subiectul 2. Fie $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu f' continuă, astfel încât

$$\int_0^1 f(t)\, dt = 0.$$

Demonstrați că:

$$\max_{\alpha\in[0,1]} \left| \int_0^\alpha f(t)\, dt \right| \leq \frac{1}{8} \cdot \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

*****

Subiectul 3. Dați exemplu de un grup G finit, necomutativ, care admite un automorfism g cu proprietatea că, pentru orice $x \in G\setminus\{e\}$, avem $g(x) \neq x$ și $g\big(g(x)\big) = x$, sau demonstrați că un astfel de grup nu există.

*****

Subiectul 4. Fie G un grup finit și H un subgrup al său. Presupunem că S este o submulțime nevidă a lui G cu proprietatea că pentru orice $x \in S$, avem: $x^2 \notin H$. Demonstrați că există $T \subset S$ astfel încât $|T| \geq \frac{1}{2}|S|$ și cu proprietatea că pentru orice $a, b \in T$, avem: $ab \notin H$ sau $ba \notin H$.

*****

Notă: Dacă X este o mulțime finită, atunci $|X|$ reprezintă numărul de elemente ale lui X.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7. Timp de lucru: 3 ore.