Concursul Național de Matematică și Informatică
„GRIGORE MOISIL"- EDITIA a XI-a
URZICENI 2 – 4 FEBRUARIE 2018
CAEN 2017/ Domeniul științific (XI) poziția 14

SUBIECTE CLASA a VIII-a

Problema 1.

Se consideră numerele reale $a<b<c$ care verifică următoarele două proprietăți:

(i) pentru orice $x\in[a,b]$ și $y\in[b,c]$, rezultă $x+y\in[a,c]$

(ii) pentru orice $x,y\in[a,c]$, rezultă $x\cdot y\in[a,c]$

1) Să se determine a,b,c știind că sunt numere întregi

2) Să se determine numerele a,b,c știind că există $x\in[a,c]$, $x\neq 0$ astfel încât $\frac{1}{x}\in[a,c]$ și $-x\in[a,c]$.

Nicolae Papacu, Slobozia

Problema 2.

Să se arate că

a) $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$, unde $a,b,x,y\in(0,\infty)$

b) $\frac{a}{a+2m\sqrt{bc}}+\frac{b}{b+2m\sqrt{ac}}+\frac{c}{c+2m\sqrt{ab}}\geq\frac{3}{2m+1}$, unde $a,b,c\in(0,\infty)$ și $m\geq 1$.

Nicolae Papacu, Slobozia

Problema 3.

Aratati ca daca a,b,c sunt dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic astfel incat :

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=8$ atunci acesta este cub.

G.M. (supliment)

Problema 4.

In paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu baza ABCD patrat avem AP $\perp$ $(A'BD)$ si CQ $\perp$ (BDC') Demonstrati ca : PQ $\perp$ (BDD')

Prof. Paunescu Constantin

Concursul Naţional de Matematică şi Informatică
„GRIGORE MOISIL"- EDITIA a XI-a
URZICENI 2 – 4 FEBRUARIE 2018

CAEN 2017/ Domeniul ştiinţific (XI) poziţia 14

SUBIECTE CLASA a VII-a

Problema 1.

Fie numerele reale $a,b,c \in (0,\infty)$. Să se demonstreze că:

1) $\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{(b+a)(b+c)}+\sqrt{(c+a)(c+b)} \le 2(a+b+c)$

2) $\sqrt{(a+b)(a+c)}+\sqrt{(b+a)(b+c)}+\sqrt{(c+a)(c+b)} \ge 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$.

Nicolae Papacu, Slobozia

Problema 2.

Fie numere naturale a,b,c cu $\{a,b,c\}=\{1,2,3\}$. Determinaţi numerele naturale nenule x,y,z astfel încât $x<y<z$ şi $xyz=ax+by+cz$.

Nicolae Papacu, Slobozia

Problema 3.

In trapezul ABCD (AB ∥CD) , fie M mijlocul diagonalei AC. Construim MN ∥BD , N € AB. Stiind ca CN ⊥ AB aratati ca distanta de la A la dreapta BC este egala cu distanta de la B la dreapta AD.

G.M.

Problema 4.

In ΔABC , AD este bisectoarea ∢ BAC si BE ⊥ AD (E € AD)

Demonstrati ca AD=4ED ⇔ AC=2AB

Prof. Constantin Paunescu

Concursul de Matematică și Informatică Grigore Moisil - Urziceni
Ediția a XI-a, 2-4 Februarie 2018

CLASA A IX-A

Subiectul 1. În ΔABC, notăm cu I – centrul cercului înscris, M – mijlocul laturii BC; iar cu J – proiecția lui I pe paralela dusă prin vârful A la BC și cu $\{K\} = AM \cap IJ$. Demonstrați că punctul K este inversul punctului J față de cercul înscris al triunghiului ABC.

(A' este inversul lui A față de un cerc de centru O și rază r dacă O, A, A' sunt coliniare, A și A' fiind de aceeași parte a lui O și $OA \cdot OA' = r^2$)

Francisco Javier García Capitán, Spania

Subiectul 2. Fie M o mulțime de numere naturale nenule cu proprietatea că pentru orice $x \in M$, avem și $4x \in M$ și $[\sqrt{x}] \in M$. Demonstrați că $M = \mathbb{N}^*$.

***

Subiectul 3. Demonstrați că dacă $1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (m-1)^n > m^n$, atunci rezultă și $1^n + 2^n + 3^n + \cdots + m^n > (m+1)^n$, unde m, n sunt numere naturale ≥ 2.

Ion Cucurezeanu

Subiectul 4. Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați că:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + 12\frac{ab + bc + ca}{a + b + c} \geq 5(a + b + c).$$

GM

Timp de lucru: 3 ore ______________________ **Selecţie de Cristinel Mortici**

Concursul de Matematică și Informatică Grigore Moisil - Urziceni Ediția a XI-a, 2-4 Februarie 2018

CLASA A X-A

Subiectul 1. Pentru un triunghi ABC, notăm cu a, b, c lungimile laturilor, cu H ortocentrul, cu O centrul cercului circumscris și cu R lungimea razei cercului circumscris. Demonstrați că

$$a + b + c + OH \geq 3R.$$

Leonard Giugiuc, Drobeta Tr. Severin

Subiectul 2. Notăm cu A suma cifrelor numărului 4444^{4444} scris în baza zece și cu B suma cifrelor lui A. Care este suma cifrelor lui B?

***

Subiectul 3. a) Fie $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ $(n \geq 2)$. Demonstrați că:

$$\sum_{1 \leq l < m \leq n} |z_l - z_m|^2 = n(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2) - |z_1 + \cdots + z_n|^2.$$

b) Fie $n > k \geq 2$ numere naturale. Determinați cel mai mic număr real $c = c(n, k)$ (în funcție de n și k) astfel încât următoarea inegalitate să aibă loc pentru orice $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{1 \leq l < m \leq k} |z_l - z_m|^2 \leq c(n, k) \cdot \sum_{1 \leq l < m \leq n} |z_l - z_m|^2$$

Nicolae Bourbăcuț, Sarmizegetusa

Subiectul 4. Determinați x și y astfel încât să avem simultan:

$$4 + \log_2(x + y) = 2^x + 2^y \quad \text{și} \quad \frac{x^2 + y^2}{4} + \frac{xy}{x + y} = 1.$$

GM

Timp de lucru: 3 ore ______________________ **Selecție de Cristinel Mortici**

Concursul de Matematică și Informatică
Grigore Moisil - Urziceni
Ediția a XI-a, 2-4 Februarie 2018

CLASA A XI-A

Subiectul 1. a) Demonstrați că pentru orice $n \geq 2$, există o matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ astfel încât $A \notin \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, însă $A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, oricare ar fi numărul natural $k \geq 2$.

b) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ cu $|\det A| = 1$, pentru care există numere naturale $p, q \geq 2$, prime între ele, astfel încât $A^p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ și $A^q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Demonstrați că $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Subiectul 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = B^2 = 0_n$ și $\det(A + B) \neq 0$. Arătați că:

a) n este par; b) $\operatorname{rang}(AB)^k = n/2$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.

Florin Stănescu, Găești

Subiectul 3. Definim șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel: Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm descompunerea sa în factori primi $n = 2^{e_1}3^{e_2} \ldots$ și notăm

$$a_n = \frac{e_1}{1 + e_1 + e_2}.$$

Arătați că, oricare ar fi $\alpha \in (0,1)$, șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are un subșir crescător, convergent către α.

***

Subiectul 4. Fie $k \in \mathbb{N}$ fixat și $(a_n)_{n\geq k} \subset (0, \infty)$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}(a_k + \cdots + a_n) = \infty \ \text{ și } \ \lim_{n\to\infty}\frac{a_k + \cdots + a_n}{a_n} = \infty.$$

Definim șirul $(x_n)_{n\geq k}$ prin $x_k > 0$ și $x_{n+1} = x_n + \frac{a_n}{x_n}$, pentru orice $n \geq k$. Demonstrați că:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{a_k + \cdots + a_{n-1}}} = \sqrt{2}.$$

GM

Timp de lucru: 3 ore ________________________ **Selecție de Cristinel Mortici**

Concursul de Matematică și Informatică
Grigore Moisil - Urziceni
Ediția a XI-a, 2-4 Februarie 2018

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie G un grup . Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $x^k \neq e$, oricare ar fi $x \in G \setminus \{e\}$ și $k \in \mathbb{N}^*$;

b) pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și mulțimi $S, T \subset G$ cu $\operatorname{card} S = \operatorname{card} T = n$, avem

$$\operatorname{card}\{st \mid s \in S, t \in T\} > n.$$

***

Subiectul 2. Fie $d(G)$ cel mai mic număr de elemente dintr-un grup finit G care generează grupul G. Demonstrați că $\operatorname{ord} G \geq 2^{d(G)}$ (prin convenție, $d(G) = 0$, dacă $\operatorname{ord} G = 1$).

(Spunem că o mulțime $A \subset G$ generează grupul G dacă orice element $g \in G$ se poate scrie sub forma $g = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_k^{s_k}$, pentru anumite elemente $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ și numere întregi $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathbb{Z}$, unde $k \geq 1$ este număr natural care poate varia).

***

Subiectul 3. Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, F o primitivă a sa, astfel încât pentru orice $x, y, z \in [a, b]$ cu z între x și y, avem: $f(z) \leq \max\{f(x), f(y)\}$.
Demonstrați că există $c, d \in [a, b]$, cu $c \leq d$, astfel încât F este concavă pe $[a, d]$ și convexă pe $[c, b]$.

Nicolae Bourbăcuț, Sarmizegetusa

Subiectul 4. Determinați funcțiile $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ derivabile, cu f' continuă, astfel încât $f(1) - f(0) = \frac{1}{2}$ și

$$\int_0^1 f(x)(f(x) - x)dx + \int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{6}.$$

GM

Timp de lucru: 3 ore ____ **Selecție de Cristinel Mortici**